

Números Reales

Hermes Pantoja Carhuavilca

Facultad de Ingeniería Industrial
Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Matemática I

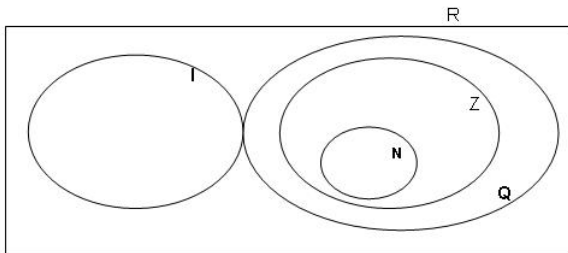


Contenido

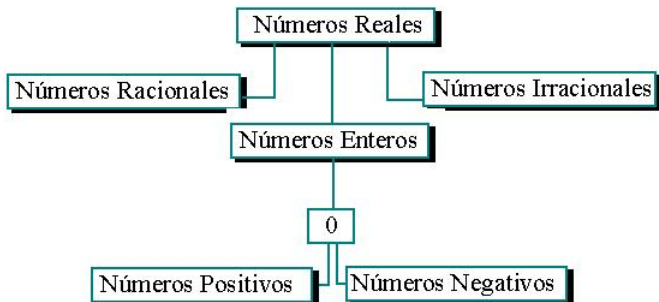
- 1 Introducción
- 2 Números Reales
- 3 Intervalos
- 4 Valor Absoluto



Introducción



Introducción



Axiomas de los Números Reales

El sistema de los números reales es un conjunto R con dos operaciones: suma(+) y multiplicación(.), y una relación de orden (<) y que satisfacen los siguientes axiomas:



Axiomas de los Números Reales

Axiomas para la adición

- 1 (Clausura) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : a + b \in \mathbb{R}$
- 2 (Conmutatividad) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : a + b = b + a$
- 3 (Asociatividad)
 $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R} : (a + b) + c = a + (b + c)$
- 4 (Existencia del elemento neutro aditivo)
 $\exists 0 \in \mathbb{R} / \forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a$
- 5 (Existencia del elemento inverso aditivo)
 $\forall a \in \mathbb{R} \exists -a \in \mathbb{R} / a + (-a) = 0$



Axiomas de los Números Reales

Axiomas para la multiplicación

- 1 (Clausura) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : a \cdot b \in \mathbb{R}$
- 2 (Conmutatividad) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : a \cdot b = b \cdot a$
- 3 (Asociatividad)
 $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- 4 (Existencia del elemento neutro multiplicativo)
 $\exists 1 \in \mathbb{R} \ 1 \neq 0 / \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a$
- 5 (Existencia del elemento inverso multiplicativo)
 $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}, \exists a^{-1} \in \mathbb{R} / a \cdot a^{-1} = 1$



Axiomas de los Números Reales

Axioma Distributiva

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R} : a.(b + c) = a.b + a.c$$



Axiomas de los Números Reales

Axiomas de la Relación de Orden

- 1 **Ley de Tricotomía.** Para cualquier par de números reales a y b se cumple una y sólo una de las afirmaciones siguientes:
 $a < b \vee a = b \vee b < a$
- 2 **Ley Transitiva.** $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}$ se cumple que:
Si $a < b \wedge b < c$ entonces $a < c$
- 3 **Ley Aditiva.** Si $a < b$, entonces para cualquier $c \in \mathbb{R}$ se cumple que: $a + c < b + c$
- 4 **Ley Multiplicativa.**
Si $a < b$ y $0 < c$ entonces $a \cdot c < b \cdot c$



Intervalos

- **INTERVALOS FINITOS**

- Son unos subconjuntos de la recta real especialmente interesantes y que se emplean mucho.
- Abierto (a, b)
- Ejemplo: $(-2, 3) \rightarrow$ Todos los números entre -2 y 3
- Cerrado $[a, b]$
- Ejemplo: $[-5, -2] \rightarrow$ Todos los números entre -5 y -2, incluidos ambos.
- Semiabierto por la izquierda $(a, b]$
- Ejemplo: $(-5, 2] \rightarrow$ Todos los números entre -5 y 2, incluido el 2.
- Semiabierto por la derecha $[a, b)$
- Ejemplo: $[-3, 2) \rightarrow$ Todos los números entre -3 y 2, incluido el -3.



Intervalos

- NOMENCLATURA Y REPRESENTACIÓN**



Intervalos

- **INTERVALOS INFINITOS o SEMIRRECTAS**

- Estos intervalos dan lugar a semirrectas.

- $(a, +\infty)$

- Ejemplo: $(2, +\infty) \rightarrow$ Todos los números mayores que 2

- $[a, +\infty)$

- Ejemplo: $[2, +\infty) \rightarrow$ Todos los números mayores que 2, incluido el 2.

-

- $(-\infty, b)$

- Ejemplo: $(-\infty, 2) \rightarrow$ Todos los números menores que 2

- $(-\infty, b]$

- Ejemplo: $(-\infty, 2] \rightarrow$ Todos los números menores que 2, incluido el 2.



Intervalos

- NOMENCLATURA Y REPRESENTACIÓN**



$$\{x / a < x\}$$



$$\{x / a \leq x\}$$



$$\{x / x \leq b\}$$



$$\{x / x < b\}$$



Ejemplos

Ejemplo

Demostrar:

Si $x \in \langle 2, 4 \rangle$ entonces $\frac{1}{2x+3} \in \left\langle \frac{1}{11}, \frac{1}{7} \right\rangle$

Ejemplo

Hallar los valores de A y B tales que para todo $x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$, se

cumple: $A \leq \frac{x+2}{x+3} \leq B$



Valor Absoluto

El Valor Absoluto de un número real $a \in \mathbb{R}$, denotado por $|a|$, es por defición:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$



Propiedades

- 1 $|a| \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}$ y $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- 2 $|-a| = |a|, \forall a \in \mathbb{R}$
- 3 $|a^2| = a^2 = |a|^2, \forall a \in \mathbb{R}$
- 4 $|ab| = |a||b|, \forall a, b \in \mathbb{R}$
- 5 $-|a| \leq a \leq |a|, \forall a \in \mathbb{R}$
- 6 $|a + b| \leq |a| + |b|, \forall a, b \in \mathbb{R}$ (Desigualdad Triangular)
- 7 $||a| - |b|| \leq |a - b|, \forall a, b \in \mathbb{R}$



Ecuaciones con Valor Absoluto

- 1 $|p(x)| = q(x) \Leftrightarrow \{q(x) \geq 0 \wedge [p(x) = q(x) \vee p(x) = -q(x)]\}$
- 2 $|p(x)| = |q(x)| \Leftrightarrow [p(x) = q(x) \vee p(x) = -q(x)]\}$
- 3 $|\lambda p(x)| = |\lambda| |p(x)|, \quad \lambda \in \mathbb{R}$



Aplicaciones

- ¿Para qué valores de x se cumplen las siguientes desigualdades?

- **EJEMPLO 1**

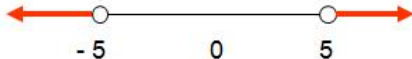
- $|x| = 5$
- $|x| = 5 \leftrightarrow x = 5 \text{ o } x = -5$
-

- **EJEMPLO 2**

- $|x| > 5$
- $|x| > 5 \leftrightarrow x > 5 \text{ o } x < -5$

- **EJEMPLO 3**

- $|x| < 5$
- $|x| < 5 \leftrightarrow x < 5 \text{ y } x > -5$



Inecuaciones con Valor Absoluto

- 1 $|p(x)| \leq q(x) \Leftrightarrow \{q(x) \geq 0 \wedge [-q(x) \leq p(x) \leq q(x)]\}$
- 2 $|p(x)| \geq q(x) \Leftrightarrow [p(x) \geq q(x) \vee p(x) \leq -q(x)]\}$
- 3 $|p(x)| \leq |q(x)| \Leftrightarrow (p(x))^2 \leq (q(x))^2$



Ejemplos

Ejemplo

Resolver la siguiente ecuación:

① $|x + 6| = |2x + 1|$

② $3|x + 1| + |x - 8| = 19$

Ejemplo

Si $\frac{1}{x} \in [1, 2]$. Determinar el menor número M , tal que

$$\left| \frac{x - 7}{2x + 5} \right| \leq M$$

